ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να εκτελέσετε τις προσθέσεις , όπου αυτό είναι δυνατόν

   α) $2χ^3+5ψ^3$ β) $2χ^3+6χ^3$ γ) $4χ^5ω-7ωχ^5$ δ) $3χ^5+4χ^2$ ε) $χ^4+3χ^4$ ζ) $2χ^2-2χ^2$

   η) $χ^2+χ^2$ θ) $χ^2+χ$ ι) $χ+χ^3$ κ) $χ^2-χ$ λ) $3χ^4-4χ^4$ μ) $3χ-3χ^3$

2. Να εκτελέσετε τις αναγωγές ομοίων όρων .

   α) $3χ^4-2χ^3+5χ^2-4χ+3χ^2+χ^4$ β) $2χ^2ψ+3χψ^2+5ψχ-3χ^2ψ^2+2ψ^2χ+5χ^2ψ-4χ^2ψ^2-χψ$

3. Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς

   α) $(2χ^2ψ)(-5χψ^2)$ β) $(3χψω^5)(4χ^4ψ^2)$ γ) $(-2χψ)(-4χψ)$ δ) $(-χψ^3)(χ^2ψ)$

4. Να βρείτε τον βαθμό των πολυωνύμων ως προς χ , ως προς ψ και ως προς χ και ψ μαζί

   α) $2χ^3-4χ+ψ$ β) $χψ^2-4χ^5ψ+χ^2ψ^6-4χ+ψ-3$ γ) $2χ^3ψ+3χψ^3 -4χ^2ψ^2+χ-ψ+1$

8. Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς

   α) $χ(χ+3)$ β) $3χ(χ-2)$ γ) $4χ(2χ-4)$ δ) $2χ^3(χ^2-3)$ ε) $4χ(χ^3-3χ^2+4χ-2)$

9. Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς , να κάνετε τις αναγωγές ομοίων όρων και να τακτοποιήσετε τα πολυώνυμα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις .

α) $(χ-3)(χ+2)$ β) $(2χ+3)(3χ+4)$ γ) $(χ^2-1)(χ^2+1)$

δ) $(χ+3)(χ+3)$ ε) $(χ^2+1)(χ-2)$ ζ) $(χ^2-3)(χ+2)$

η) $(χ^2+1)(χ^3-2)$ θ) $(χ^2+χ-3)(χ+2)$ ι) $(χ^3-3)(χ^2+2χ-4)$

κ) $(χ^2+5χ+1)(χ-2)$ λ) $(3χ^2+1)(4χ-2)$ μ) $(χ^2+4χ-1)(3χ^2-6χ-2)$

ν) $(χ-3)(χ+2)(χ-5)$ ξ) $(2χ-1)(4χ+2)(χ-1)$ ο) $2χ(χ+3)(χ-4)$

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Οι ταυτότητες είναι ισότητες που ισχύουν για όλες τις τιμές των μεταβλητών τους και μας επιτρέπουν να εκτελούμε πράξεις με μεγαλύτερη ταχύτητα και ευκολία . Οι κυριότερες είναι :

1. $(α+β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2$
2. $(α-β)^2 = α^2 - 2αβ + β^2$
3. $(α+β)(α-β) = α^2 - β^2$
4. $(α+β)^3 = α^3 + 3α^2β + 3αβ^2 + β^3$
5. $(α-β)^3 = α^3 - 3α^2β + 3αβ^2 - β^3$
6. $α^3+β^3 = (α + β)(α^2 - αβ + β^2)$
7. $α^3-β^3 = (α -β)(α^2 + αβ + β^2)$
8. $(α+β+γ)^2 = α^2+β^2+γ^2+2αβ+2βγ+2αγ$

Η εφαρμογή κάποιας από αυτές γίνεται με απλή αντικατάσταση των ποσοτήτων που έχουμε , στη θέση των α και β . Στην περίπτωση που η ποσότητα που έχουμε είναι πολύπλοκη , είναι αναγκαία η χρήση παρενθέσεων .

Παραδείγματα

1. $(χ+3)^2 =$

2. $(ψ-2)^2 =$

3. $(χ+1)^2=$

4. $(α+2/3)^2=$

5. $(χ+1/χ)^2=$

6. $(χ/3+ψ/2)^2=$

7. $(2χ-3)^2=$

8. $(χ+2ψ)^2=$

9. $(4χ-3ψ)^2=$

10. $(χ+3)(χ-3) =$

11. $(2χ-1)(2χ+1)=$

12. $(4χ-3ψ)(4χ+3ψ)=$

13. $(χ-2/ψ)(χ+2/ψ)=$

14. $(α/2-β/3)(α/2+β/3)=$

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Οι ταυτότητες χρησιμοποιούνται μέσα σε αλγεβρικές παραστάσεις . Σε τέτοια περίπτωση θα πρέπει να εκτελούνται πρώτα οι ταυτότητες , τα αποτελέσματα να μπαίνουν μέσα σε παρένθεση και κατόπιν να γίνονται οι πολ/σμοί και οι προσθέσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γίνουν οι πράξεις

α. $(α+8)^2$ β. $(χ-2)^2$ γ. $(ψ+κ)^2$ δ. $(χ+4ψ)^2$ ε. $(3κ-5λ)^2$

ζ. $(5/κ - 4/λ)^2$ η. $(2/3-χ/4)^2$ θ. $(χ - 3/χ)^2$ ι. $(χ/3+3ψ/4)^2$ κ. $(3χ+χ/2)^2$

2. Να συμπληρωθούν οι ισότητες

α. $(χ+\quad)^2 = χ^2 + ... +9$ β. $(....- 5)^2 =$ .... $-6χ + 25$

γ. $(..... +......)^2 = 9χ^2 + ... +16ψ^2$ δ. $(2χ - .....)^2 = ...$ $-12χψ$ + ...

ε. $(3χ - .....)(3χ +......) = ...-16ψ^2$

1. Να γίνουν οι πράξεις

α. $(χ+8)(χ-8)$ β. $(4χ-1)(4χ+1)$ γ. $(χ-3ψ)(χ+3ψ)$

δ. $(χ+2/α)(χ-2/α)$ ε. $(α/2-κ/3)(α/2+κ/3)$ ζ. $(χ/3-β/3)(χ/3+β/3)$

4. Να συμπληρωθούν οι ισότητες

α. $(3χ - .....)(3χ +......) = ...-16ψ^2$ β. $(2χ +.....)(.....- 3) = ...$ – 9

5. Να γίνουν οι πράξεις

α. $(κ-2)^3$ β. $(μ+4)^3$ γ. $(3χ-2)^3$ δ. $(α-3β)^3$ $(2α+3β)^3$

6. Να γίνουν οι πράξεις

α. $(α+β)^2 + (α-β)^2 + (α+β)(α-β)$ β. $(χ-1)(χ+2)(χ-3) + (χ-1)^2 - 3χ(χ+2)^2$

γ. $(χ-2)^3 + (3χ-2)(3χ+2) - (χ+1)^3$ δ. $(4χ-3ψ)^2 + (3χ-4ψ)^2 - (5χ-2ψ)(5χ+2ψ)$

ε. $(2χ+3ψ)^2+(3χ-2ψ)^2 -2(2χ+3ψ)(3χ-2ψ)$ ζ. $χ(χ-1)-χ(3-ψ)-(χ-3)(χ+4)-(χ-ψ)^2$

η. $[3-(χ-2)^2]^2 +[(χ-1)^2+(χ+2)^2]^2$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

Παραγοντοποίηση είναι η μετατροπή αθροισμάτων σε γινόμενα . Η διαδικασία αυτή είναι χρήσιμη στις πράξεις κλασμάτων που οι όροι τους είναι πολυώνυμα, στην επίλυση εξισώσεων, απλοποίηση παραστάσεων και αλλού.

Τα διάφορα τεχνάσματα που χρησιμοποιούνται αναπτύσσονται παρακάτω .

1. Εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας : αβ+αγ=α(β+γ)
(εξαγωγή κοινού παράγοντα)

Αν σε κάθε όρο του αθροίσματος υπάρχει κάποιος κοινός παράγοντας , τότε βγαίνει έξω από μια παρένθεση

Παραδείγματα

1. $χψ + χω =$
2. $3χ - 3ω =$
3. $χψω + χκω =$
4. $3χ - 6ψ =$
5. $6χ - 8ψ =$
6. $χ^2 - 3χ =$
7. $χ^2 + 3χ =$
8. $χ^2 + χ =$
9. $2χ^3 + 4χ^2 =$
10. $6χ^3 - 15χ^2 =$

2. Εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας : αχ+αψ+βχ+βψ=(α+β)(χ+ψ)
(Ομαδοποίηση)

Χωρίζοντας τους όρους του πολυωνύμου σε ομάδες (πολυώνυμα) με ίσο πλήθος όρων, βλέπουμε πολλές φορές ότι, αν βγάλουμε από τους όρους κάθε ομάδας τους κοινούς παράγοντές τους εκτός παρένθεσης, εμφανίζεται το ίδιο πολυώνυμο μέσα στις παρενθέσεις όλων των ομάδων. Τότε το πολυώνυμο των παρενθέσεων είναι κοινός παράγοντας όλων των ομάδων και μπορεί να γραφεί μπροστά από μια νέα παρένθεση. (Η δυσκολία στην περίπτωση αυτή είναι να διακρίνουμε την κατάλληλη ομαδοποίηση των όρων).

Παραδείγματα

1. $3χ + 3ω + αχ + αω =$
2. $2χ + 6ω + χ^2 + 3χω =$
3. $χ^3 + 2χ^2 + 4χ + 8 =$
4. $χ + ψ + αχ + αψ =$
5. $χ^3 - 2χ^2 - χ + 2 =$

6. $\chi^3 - 3\chi^2 + 3\chi - 1 =$

7. $\chi^4 - 4\chi^2 + 2\chi + 4 =$

8. $\chi^4 + 2\chi^3 + \chi^2 - 4 =$

3. Εφαρμογή της ταυτότητας : $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ και της $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ (Τέλειο τετράγωνο διωνύμου)

Αν το άθροισμα αποτελείται από 3 όρους , ελέγχουμε αν οι δύο είναι τετράγωνα κάποιων αριθμών και ο τρίτος είναι το διπλάσιο γινόμενό τους . Αν αυτό συμβαίνει , τότε εφαρμόζεται αυτή η ταυτότητα .

Παραδείγματα

1. $\chi^2-4\chi+4=$

2. $\chi^2-2\chi+1=$

3. $\chi^2+4\chi+4=$

4. $\chi^2+6\chi+9 =$

5. $\chi^2-4\chi+9=$

4. Εφαρμογή της ταυτότητας $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)= \alpha^2 - \beta^2$ (Διαφορά τετραγώνων)

Αν το άθροισμα αποτελείται από 2 όρους και δεν έχει κοινό παράγοντα , τότε ίσως να γίνεται εφαρμογή αυτής της ταυτότητας , μετά από κάποια ενδεχόμενη τροποποίηση .

Παραδείγματα

1. $\chi^2-4=$

2. $\chi^2-9=$

3. $4\chi^2-9\psi^2=$

4. $\chi^4- \psi^2/9=$

5. Εφαρμογή της ταυτότητας : $\chi^2 +(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta=(\chi+\alpha)(\chi+\beta)$ (Παραγοντοποίηση τριωνύμου)

Αν έχουμε τριώνυμο και δούμε ότι δεν είναι τετράγωνο διωνύμου τότε προσπαθούμε να βρούμε δυο αριθμούς α και β έτσι ώστε : το άθροισμά τους να είναι ο συντελεστής του χ και το γινόμενό τους να είναι ο σταθερός αριθμός . Έπειτα εφαρμόζουμε την ταυτότητα :

$$\chi^2 +(\alpha+\beta)\chi+\alpha\beta=(\chi+\alpha)(\chi+\beta)$$

Υπάρχουν 4 διαφορετικές περιπτώσεις , ανάλογα με το συνδυασμό των προσήμων των α και β και φαίνονται στα παρακάτω παραδείγματα :

Παραδείγματα

Η Μέθοδος : Έστω το τριώνυμο $\chi^2-8\chi+15$. Θα ψάξουμε να βρούμε δυο αριθμούς που να έχουν άθροισμα -8 και γινόμενο 15. Ξεκινάμε πάντα από το γινόμενό τους. Για να είναι 15 σημαίνει ότι οι αριθμοί που ψάχνω είναι ομόσημοι. Επειδή όμως το άθροισμά τους είναι αρνητικός (-8), τότε θα είναι και οι δυο αρνητικοί. Παίρνουμε π.χ.

τους παράγοντες -3 και -5 του 15 και βλέπουμε ότι έχουν άθροισμα -8, άρα είναι αυτοί που ψάχνουμε.Έτσι το τριώνυμο $\chi^2-8\chi+15$ γράφεται σε γινόμενο παραγόντων :

$(\chi-3)(\chi-5)$

Κάθε τριώνυμο δεν αναλύεται πάντοτε σε γινόμενο παραγόντων, π.χ. το $\chi^2+4\chi+7$.

τριώνυμο	$\chi^2+5\chi+6$		$\chi^2-5\chi+6$		$\chi^2+5\chi-6$		$\chi^2-5\chi-6$	
άθροισμα	α+β	αβ	α+β	αβ	α+β	αβ	α+β	αβ
γινόμενο	5	6	-5	6	5	-6	-5	-6
ποιοτική αναγνώριση	ομόσημοι θετικοί		ομόσημοι αρνητικοί		ετερόσημοι μεγαλύτερος θετ		ετερόσημοι μεγαλύτερος αρν	
Αρα :α= , β=	2	3	-2	-3	6	-1	-6	1
παραγοντοπ.	$(\chi+2)(\chi+3)$		$(\chi-2)(\chi-3)$		$(\chi+6)(\chi-1)$		$(\chi-6)(\chi+1)$	

τριώνυμο	$\chi^2+4\chi+3$		$\chi^2-3\chi+2$		$\chi^2+4\chi-5$		$\chi^2-6\chi-16$	
άθροισμα	α+β	αβ	α+β	αβ	α+β	αβ	α+β	αβ
γινόμενο								
ποιοτική αναγνώριση	ομόσημοι θετικοί		ομόσημοι αρνητικοί		ετερόσημοι μεγαλύτερος θετ		ετερόσημοι μεγαλύτερος αρν	
Αρα :α= , β=								
παραγοντοπ.								

5. **Πως γίνεται τελικά η παραγοντοποίηση ;**

Όλα , όσα αναφέρθηκαν παραπάνω είναι τεχνικές οι οποίες εφαρμόζονται είτε μαζί είτε χωριστά για να παραγοντοποιηθεί μια ποσότητα . Ανάλογα με την ποσότητα που έχουμε , χρησιμοποιούμε κάποια ή κάποιες από αυτές . Όταν θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε μια ποσότητα σκεφτόμαστε διαδοχικά τα παρακάτω :

Σκέψη		**Ενέργεια**
1. Μήπως έχουν όλοι κάτι κοινό (είτε αριθμό είτε μεταβλητή) το οποίο θα βγει κοινός παράγοντας ;		Βγάζω τον κοινό παράγοντα και προχωρώ στο επόμενο Αν δεν έχουν προχωρώ στο επόμενο
2. Πόσοι όροι είναι ;	**α.** 2 όροι	Μήπως είναι διαφορά τετραγώνων ;
	β. 3 όροι	Μήπως είναι τετράγωνο διωνύμου ; Αν όχι , μήπως παραγοντοποιείται σαν τριώνυμο ;
	γ. 4 ή 6 όροι	Μήπως μπορεί να γίνει κατάλληλη ομαδοποίηση ;
3. Μήπως δεν παραγοντοποιείται ;		

Εφαρμογές (συνδυασμός όλων των περιπτώσεων)

1. $\chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi =$
2. $\chi^3 - 5\chi^2 + 4\chi =$
3. $\chi^3 - 4\chi =$
4. $2\chi^5 - 4\chi^4 + 2\chi^3 - 4\chi^2 =$
5. $\chi^5 - 16\chi =$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

α. $χψ + χκ$ β. $5χ - 5ω$ γ. $χρω + χκω$ δ. $3χ – 6α$ ε. $6β - 8ψ$

ζ. $6χ^2 - 3χ$ η. $12χ^2 + 3χ$ θ. $χ^2 -5χ$ ι. $2χ^3 + 6χ^2$ κ. $6χ^3 - 21χ^2$

λ. $χ^2-36$ μ. $χ^2-49$ ν. $9χ^2-25ψ^2$ ξ. $χ^4- ψ^2/4$ ο. $χ^6-ψ^6$

π. $χ^2-4χ+4$ ρ. $χ^2+2χ+1$ σ. $χ^2+8χ+16$ τ. $χ^2-6χ+9$ υ. $χ^2-4χ+9$

φ. $χ^2-9χ+8$ χ. $χ^2-8χ-9$ ψ. $χ^2+5χ-6$ ω. $χ^2+8χ+9$

2. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

α) $3χψ^2+6χ^2ψ+12χ^2ψ^2$, β) $16χ^2ψω-24χψ^2ω^2+32χψω$.

γ) $αχ+βψ+α-βχ-αψ-β$, δ) $1-χ+χ^2-χ^3+χ^4-χ^5+χ^6-χ^7$.

ε) $64χ^2-(3ψ-2)^2$, ζ) $9(χ+3ψ)^2 - 16(2χ-5ψ)^2$.

η) $25χ^2+40χψ+16ψ^2$, θ) $4χ^3-20χ^2+25χ$ θ) $χ^2-8χ+15$

3. Να γίνουν γινόμενα παραγόντων οι παραστάσεις:

α) $(5χ-10)(χ^2-1)-(7χ-14)(χ-1)^2$, β) $χ^2+(2α+1)χ+α^2+α$ γ) $(χ+ψ+1)^2 - (χ-ψ-1)^2$

4. Να γίνουν γινόμενα παραγόντων οι παραστάσεις:

α) $9χ^2-25ψ^2$ β) $25ψ^2-4χ^2$ γ) $χ^2-4χ+3$ δ) $χ^2+5χ+4$ ε) $χ^2-5χ-14$.

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

1. Ορισμός

Κλασματική αλγεβρική (ΚΑΠ) λέγεται μια παράσταση όταν περιέχει τουλάχιστον ένα κλάσμα του οποίου ο παρονομαστής περιέχει μεταβλητή .

2. Πότε ορίζεται μια ΚΑΠ ;

Οταν ο παρονομαστής δεν είναι μηδέν .

Το $\dfrac{χ+1}{χ-3}$ ορίζεται αν : .... ενώ το $\dfrac{χ+4}{(χ-3)(χ+5)}$ ορίζεται αν :............................

3.Πως γίνεται ο πολ/σμός και η διαίρεση των ΚΑΠ ;

Οπως και ο πολ/σμός και η διαίρεση των κλασμάτων . Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή επί αριθμητή και το γινόμενο το βάζουμε αριθμητή της νέας παράστασης και παρονομαστή επί παρονομαστή και το γινόμενο αυτό το βάζουμε παρονομαστή της νέας παράστασης.

$$\frac{χ+1}{χ-3}.\frac{χ+5}{χ+2}=$$

Για την διαίρεση δυο κλασματικών παραστάσεων εφαρμόζουμε το εξής: πολλαπλασιάζουμε τον διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη. Π.χ. .

4. Πως γίνεται η απλοποίηση των ΚΑΠ ;

Μπορούμε να απλοποιούμε μια ποσότητα που είναι κοινός παράγοντας (Προσοχή : όχι κοινός όρος) των δύο όρων του κλάσματος . Αν η ΚΑΠ δεν είναι παραγοντοποιημένη, την παραγοντοποιούμε εμείς με τον κατάλληλο τρόπο .

$$\frac{\chi^2 - 4\chi}{\chi^2 - 16} =$$

$$\frac{\chi^2 - 5\chi + 6}{\chi^2 - 6\chi + 9} =$$

5. Πως γίνεται η πρόσθεση και η αφαίρεση των ΚΑΠ ;

α) Αν έχουν κοινό παρονομαστή , τότε προσθέτουμε τους αριθμητές και αφήνουμε ίδιο παρονομαστή .

$$\frac{\chi}{\chi+1} + \frac{\chi-3}{\chi+1} =$$

β) Αν ο ένας παρονομαστής είναι τμήμα του άλλου τότε πολ/ζω το πιο απλό κλάσμα με ότι του λείπει από τον παρονομαστή .

$$\frac{\chi+1}{\chi-3} + \frac{\chi+2}{\chi(\chi-3)} =$$

γ) Αν έχουν διαφορετικούς παρονομαστές , αλλά απλούς και πρωτοβάθμιους , τότε πολ/ζω τους όρους κάθε κλάσματος με τον παρονομαστή του άλλου .

$$\frac{\chi}{\chi+2} + \frac{\chi+4}{\chi+1} =$$

δ) Αν πρέπει να προσθέσω περισσότερα από δύο κλάσματα με διαφορετικούς και πολύπλοκους παρονομαστές , τότε :

1. Παραγοντοποιώ
2. Βρίσκω το ΕΚΠ , το οποίο αποτελείται από όλους τους παράγοντες που συμμετέχουν στους παρονομαστές , μια φορά τον καθένα και με το μεγαλύτερο εκθέτη .
3. Πολ/ζω τους αριθμητές των κλασμάτων με ότι λείπει από τον παρονομαστή τους σε σχέση με το ΕΚΠ
4. Σχηματίζω ένα κλάσμα με παρονομαστή το ΕΚΠ .

Για παράδειγμα :

$$\frac{\chi-1}{\chi^2+2\chi} + \frac{3\chi}{\chi^2-4} - \frac{\chi+1}{\chi^3-2\chi^2} =$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι παρακάτω ομάδες κλασμάτων .

α) $\frac{\chi}{\chi+1}$, $\frac{3}{\chi+2}$, $\frac{\chi+1}{\chi^2-1}$ και β) $\frac{2}{\chi+1}$, $\frac{3}{\chi^2+\chi}$, $\frac{4}{\chi}$

ι) Να πολλαπλασιάσετε **κάθε** κλάσμα της ομάδας α με **κάθε** κλάσμα της ομάδας β

ιι) Να προσθέσετε **κάθε** κλάσμα της ομάδας α με **κάθε** κλάσμα της ομάδας β

Σε κάθε περίπτωση (από τις 9) να απλοποιήσετε τα κλάσματα που προκύπτουν (αν γίνεται)

2. Να γίνουν οι πράξεις

α) $\frac{\chi-3}{\chi^2+3\chi}+\frac{6\chi}{\chi^2-9}-\frac{\chi+2}{\chi^3-3\chi^2}$ β) $\frac{\chi-2}{\chi^2+2\chi}\,\frac{3\chi^3}{\chi^2-4}\,\frac{\chi+2}{\chi^3-2\chi^2}$

3. Να γίνουν οι απλοποιήσεις όπου είναι δυνατόν

α) $\frac{\chi+3}{\chi^2+3\chi}$ β) $\frac{\chi-9}{\chi^2-9}$ γ) $\frac{\chi-2}{\chi^3-2\chi^2}$ δ) $\frac{\chi-2}{\chi+2}$ ε) $\frac{\chi-2}{\chi^3-4\chi}$ ζ) $\frac{\chi-1}{\chi^2-\chi}$

Ε Ξ Ι Σ Ω Σ Ε Ι Σ

Εξίσωση είναι μια ισότητα που περιέχει μια μεταβλητή και αληθεύει για ορισμένες τιμές της μεταβλητής , π.χ.

α) χ+5=8 , αληθεύει για . . . .

β) $\chi^2=4$, αληθεύει για . . . .

γ) χ+3=χ+3 , αληθεύει για . . . .

δ) $\chi^2+5=0$, αληθεύει για . . . .

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1. Αν η εξίσωση είναι πρωτοβάθμια τότε :

α) Αν υπάρχουν κλάσματα τα κάνω ομώνυμα , πολ/ζοντας τα πάντα επί ΕΚΠ .
β) Εκτελώ όλους τους πολ/σμούς
γ) Χωρίζω γνωστούς από αγνώστους και κάνω αναγωγές
δ) Διαιρώ με τον συντελεστή του αγνώστου .

Σχόλιο : Αν η εξίσωση έχει τη μορφή 0χ=0 , τότε έχει άπειρες λύσεις , ενώ όταν έχει τη μορφή 0χ=5 , είναι αδύνατη .

2. Αν η εξίσωση είναι πολυωνυμική , τότε :

α) Είτε την παραγοντοποιώ και τη φέρνω στη μορφή (...)(...)=0 , οπότε :
(...)=0 ή (...)=0

Π.χ. $\chi^2-4\chi=0 \Leftrightarrow \chi(\chi-4)=0 \Leftrightarrow \chi=0$ ή $\chi-4=0 \Leftrightarrow \chi=0$ ή $\chi=4$

β) Είτε την φέρνω στη μορφή $\chi^2=\alpha^2$, οπότε $\chi=\pm\sqrt{\alpha}$

Π.χ. $\chi^2=4 \Leftrightarrow \chi=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow \chi=\pm 2$

γ) Είτε τη φέρνω στη μορφή $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ και τη λύνω με τους τύπους :

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, οποτε : α) αν Δ>0 , τοτε $\chi_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$,
β) αν Δ=0 , τοτε $\chi = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$, γ) αν Δ<0 ειναι αδυνατη

Π.χ. χ^2-4χ+3=0

3. Αν υπάρχουν κλάσματα ,τότε :

Κάνω απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας με το ΕΚΠ (αφού βέβαια παραγοντοποιήσω τους παρονομαστές και βάλω περιορισμό : ΕΚΠ≠0) .
Κατόπιν εκτελώ τους πολ/σμούς , φέρνω όλους τους όρους στο πρώτο μέλος , κάνω αναγωγές ομοίων όρων και λύνω την εξίσωση που προκύπτει με ένα από τους προηγούμενους τρόπους .
Π.χ.

$$\frac{\chi-1}{\chi^2+2\chi} + \frac{3\chi}{\chi^2-4} - \frac{\chi+1}{\chi^3-2\chi^2} = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

1. $\chi^2 - 3\chi = 0$
2. $\chi^3 - 4\chi = 0$
3. $\chi^2 - 16 = 0$
4. $\chi^2 + 9 = 0$
5. $\chi^2 - 3\chi = 0$
6. $4\chi^2 - 1 = 0$
7. $\chi^3 + 4\chi = 0$
8. $2\chi^3 - 4\chi^2 = 0$
9. χ3 - $4\chi^2$ = 0
10. $\chi^2 - 6\chi + 5 = 0$
11. $\chi^2 - 7\chi + 6 = 0$
12. $\chi^2 - 5\chi + 6 = 0$
13. $\chi^2 - 5\chi + 4 = 0$
14. $\chi^2 - 3\chi + 2 = 0$
15. $\chi^2 - \chi - 2 = 0$
16. $2\chi^2 - 3\chi - 2 = 0$
17. $\chi^2 - 6\chi + 9 = 0$
18. $\chi^2 - 6\chi + 10 = 0$
19. $(\chi^2 - 4)(\chi^2 - 1) = 0$
20. $\chi(\chi - 3) - 4(\chi - 3) = 0$
21. $(\chi - 2)^2 - \chi(\chi + 1) + 6 = 0$
22. $\chi(\chi+2)-(\chi+2)^2+3\chi(\chi-1)+6\chi = 0$

$$\frac{\chi+2}{\chi} + \frac{\chi}{\chi^2-9} + \frac{\chi-2}{\chi^2-3\chi} = \frac{15\chi}{4\chi^2+12\chi}$$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ Βιομαθηματικών Α' τεύχος

ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ

Η απόλυτη τιμή δίνεται από τη σχέση : $|a| = \begin{cases} a, & \text{αν } a > 0 \\ 0, & \text{αν } a = 0 \\ -a, & \text{αν } a < 0 \end{cases}$

Ισχύουν:

(0.1) $$|a| \geq 0$$

(0.2) $$-|a| \leq a \leq |a|$$

(0.3) $$|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

(0.4) $$|x| - |y| \leq |x - y| \;\wedge\; |y| - |x| \leq |x - y|$$

(0.5) $$|a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n|$$

(0.6) $$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$$

(0.7) $$|x| < \vartheta \Leftrightarrow -\vartheta \leq x \leq \vartheta, \text{ για } \vartheta > 0.$$

(0.8) $$|x| > \vartheta \Leftrightarrow x > \vartheta \text{ ή } x < -\vartheta \text{ για } \vartheta > 0$$

(0.9) $$|x| = \vartheta \Leftrightarrow x = \vartheta \text{ ή } x = -\vartheta, \text{ για } \vartheta > 0$$

(0.10) $$\sqrt{a^2} = |a|$$

ΣΥΝΟΛΑ

Ιδιότητες των υποσυνόλων

1. $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο A
2. $\varnothing \subset A$ για κάθε σύνολο A
3. $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ = $A \subseteq \Gamma$
4. $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ = $A = B$

Ιδιότητες της ένωσης συνόλων

1. $A \cup A = A$ για κάθε σύνολο A
2. $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$
3. $A \cup B = B \cup A$
4. $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma) = A \cup B \cup \Gamma$

Ιδιότητες της τομής συνόλων

1. $A \cap A = A$ για κάθε σύνολο A
2. $A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$
3. $A \cap B = B \cap A$ για κάθε A , B
4. $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$
5. $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma) = A \cap B \cap \Gamma$

ΤΥΠΟΙ De Morgan:

1. $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
2. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

(0.1) **ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ** $a > b \Leftrightarrow a \pm k > b \pm k$

(0.2) $a > b,\ c > d \Leftrightarrow a + c > b + d$

(0.3) $a > b,\ \kappa > 0 \Leftrightarrow \kappa a > \kappa b,\ \dfrac{a}{\kappa} > \dfrac{b}{\kappa}$

(0.4) $a > b,\ \lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda a < \lambda b,\ \dfrac{a}{\lambda} < \dfrac{b}{\lambda}$

(0.5) $a > 0,\ b > 0$ και $a > b \Rightarrow a^2 > b^2$

(0.6) $a < 0,\ b < 0$ και $a > b \Rightarrow a^2 < b^2$

(0.7) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0$

(0.8) $|x| < \vartheta \Leftrightarrow -\vartheta \leq x \leq \vartheta$, για $\vartheta > 0.$

(0.9) $|x| > \vartheta \Leftrightarrow x > \vartheta$ ή $x < -\vartheta$ για $\vartheta > 0$

(0.10) $|x| = \vartheta \Leftrightarrow x = \vartheta$ ή $x = -\vartheta$, για $\vartheta > 0$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

(1.1) **ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ** $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(1.2) $(a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(1.3) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(1.4) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

(1.5) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

(1.6) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

(1.7) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

(1.8) $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b+c) + 3b^2(c+a) + 3c^2(a+b) + 6abc$

ΤΡΙΩΝΥΜΟ

Το πλήρες τριώνυμο έχει τη μορφή $ax^2+bx+c,\quad a\neq 0$.

Η διακρίνουσα του είναι : $\Delta=\sqrt{b^2-4ac}$

Αν $\Delta>0$ τότε το τριώνυμο έχει δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες (λύσεις).

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Αν $\Delta=0$ τότε το τριώνυμο έχει μια διπλή πραγματική ρίζα. $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$

- Αν το τριώνυμο έχει διπλή ρίζα, τότε $\forall x\in\mathbb{R}$ είναι ομόσημο του a, εκτός αυτής που το μηδενίζει
- Αν το τριώνυμο έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1 και x_2 με $x_1<x_2$, τότε $\forall x\in(x_1,x_2)$ παίρνει τιμή ετερόσημη του a, ενώ $\forall x<x_1$ ή $\forall x>x_2$ παίρνει τιμή ομόσημη του a.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Στα παρακάτω οι παρανομαστές θεωρούνται διάφοροι του μηδενός και οι $\kappa,\ \lambda\in\mathbb{Z}$

(0.1) $a^{-\kappa}=\frac{1}{a^{\kappa}}$

(0.2) $a^{\kappa}\cdot a^{\lambda}=a^{\kappa+\lambda}$

(0.3) $\left(a^{\kappa}\right)^{\lambda}=a^{\kappa\lambda}$

(0.4) $(a\cdot b\cdot c)^{\kappa}=a^{\kappa}\cdot b^{\kappa}\cdot c^{\kappa}$

(0.5) $\frac{a^{\kappa}}{a^{\lambda}}=a^{\kappa-\lambda}$

(0.6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\kappa}=\frac{a^{\kappa}}{b^{\kappa}}$

(0.7) $a^{\frac{\kappa}{\lambda}}=\sqrt[\lambda]{a^{k}}$